Применение прогнозатора для расчета оценки прогноза заданного сигнала

А. В. Дылевский, email: nefta@yandex.ru[1,2]
Д. А. Хрипушин, email: qepm@outlook.com[2]

[1] Воронежский филиал Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова
[2] Воронежский государственный университет

Аннотация. *В данной работе рассматривается метод вычисления оценки прогноза сигнала с помощью автоматического реализуемого прогнозатора. Такие задачи возникают как в теории автоматического управления, так и в различных приложениях, где требуется получить прогноз по наблюдаемой реализации. Актуальность проведенного исследования определяется тем, что при нахождении прогноза некоторого сигнала на время упреждения существенное значение может иметь время вычисления прогноза. Если время вычисления прогноза больше времени упреждения, то полученный прогноз не имеет смысла. Поэтому при прогнозировании надо стремиться к тому, чтобы время вычисления прогноза было значительно меньше времени упреждения. В этом случае будет запас времени для принятия решений. Предлагаемый в рассматриваемой статье метод позволяет рационально организовать вычислительную схему прогнозирования и уменьшить время вычисления прогноза. В статье получена явная расчётная формула для вычисления оценки прогноза заданного входного сигнала. Формула сводится к вычислению на каждом временном шаге взвешенных интегралов входного сигнала. В данной статье предложен способ уменьшения количества операций интегрирования на каждом шаге. Это позволяет уменьшить время вычисления прогноза при сохранении точности. Предложенный метод может быть применён как для непрерывных (аналоговых), так и для дискретных сигналов.*

Ключевые слова: *прогнозатор, передаточная функция, время вычисления, точность прогноза.*

Введение

Фондовый рынок динамичен, чередование периодов роста и спада для него – естественное состояние. Данная волатильность влияет не только на локальные, но и на глобальные международные рынки.

Однако продолжительность и амплитуда роста или падения не одинакова, в связи с чем, чтобы определить дальнейшую тенденцию, важнокорректно применять различные экономические индикаторы. В данной статье рассматривается применение опережающих индикаторов.

Такие индикаторы предоставляют информацию о начале трендов, которые еще явно себя не проявили. Опережающие индикаторы могут использоваться для прогнозирования экономических процессов, для принятия обоснованных инвестиционных решений и своевременного проведения ребалансировки инвестиционного портфеля. Очевидно, что для построения опережающих индикаторов требуется определение в настоящем будущей тенденции, что в конечном итоге приводит к необходимости прогнозирования экономических процессов.

Очевидно, что любые экономические процессы характеризуются набором некоторых параметров. В этой связи во многих направлениях и областях появляются задачи прогнозирования параметров: прогнозирование показателей в финансовой отчетности предприятия, прогнозирование цены на финансовый актив, прогнозирование числа заболевших вирусной болезнью, прогнозирование температуры воздуха в регионе или количества выпавших осадков и т.д. Один из подходов к решению таких задач основан на построении математических моделей соответствующих процессов. Например, с помощью математических моделей физических процессов в атмосфере и океане были разработаны гидродинамические методы прогноза погоды [1]. Подобный подход требует корректного описания сложных математических моделей, а иногда и ансамбля моделей. Помимо этого, требуются знания параметров, характеризующих исследуемое явление или процесс. Данные сложностизаметно ограничивают практическое применение описываемого подхода. В прикладных задачахчасто возникают ситуации, когда математическое моделирование, основанное на использовании точных законов, оказывается затруднительным, но в распоряжении исследователей оказывается результат наблюдений параметров исследуемого процесса или явления. В этих случаях для решения задач прогнозирования могут быть использованы методы, основанные на анализе наблюдаемых параметров.

При нахождении прогноза некоторого сигнала $f(t)$ на время τ существенное значение может иметь время вычисления прогноза $f(t+\tau)$. Если $\Delta \geq \tau$, то полученный прогноз не имеет смысла. Очевидно, что при прогнозировании надо стремиться к выполнению условия $\Delta << \tau$. В этом случае будет запас времени для принятия решений. Например, построение автоматической торговой системы (торгового робота) для торговли на бирже финансовыми инструментами (акциями, фьючерсами, валютами и т.д.) по прогнозируемому значению цены инструмента требует оценки доходности и риска сделки, размера торговой позиции, оценки времени и уровня вхождения в сделку. Поэтому запас по времени при получении прогноза может дать существенные преимущества, особенно при торговле на малых интервалах времени. Если же в силу каких-либо причин (сложности применяемой модели, большого объёма вычислений и т.д.) время Δ вычисления прогноза уменьшить нельзя, то следует либо увеличивать длительность прогноза τ, либо уменьшать точность прогноза (например, за счёт упрощения применяемой модели).

В данной работе предлагается метод вычисления прогноза с помощью реализуемого прогнозатора, синтеза которого изложен в [2]. Рассматриваемый метод позволяет рационально организовать вычислительную схему прогнозирования и максимально уменьшить время вычисления прогноза. Предлагаемый в статье метод может быть применён как к непрерывным (аналоговым), так и к дискретным сигналам.

1. Постановка задачи

Пусть задан сигнал $f : C^{\infty}[0,T] \to \mathbb{R}$. Как было показано в [2], для произвольного $\tau > 0$ при помощи устройства с передаточной функцией

$$\Psi_N(p) = \sum_{n=0}^{N} d_n \omega^n(p), \quad p \in \mathbb{C} \tag{1}$$

может быть получена оценка прогноза $f(t+\tau)$ по известному сигналу $f(t)$, $t \in [0,T]$. В формуле (1)

$$\omega(p) = \frac{p}{\mu p + 1}, \quad \mu > 0 \tag{2}$$

коэффициенты d_n представляют собой коэффициенты ряда Бурмана – Лагранжа [2] и определяются по следующим формулам [2]:

$$d_0 = 1,$$

$$d_n = \frac{1}{n!}\lim_{p \to 0} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left[\frac{\left(e^{\tau p}\right)' p^n}{\omega^n(p)}\right],\ n \ge 1. \tag{3}$$

Обозначим через $F(p)$ изображения по Лапласу сигнала $f(t)$. Тогда изображение $\Psi_N(p)F(p)$ будет представлять собой изображение оценки прогноза $f(t+\tau)$. Положим

$$G_N(\mu,\tau,p) = \Psi_N(p)F(p) \doteqdot g_N(\mu,\tau,t) \tag{4}$$

и рассмотрим задачу нахождения оригинала $g_N(\mu,\tau,t)$ по изображению $G_N(\mu,\tau,p)$. Здесь $g_N(\mu,\tau,p)$ – оценка прогноза $f(t+\tau)$, полученная с помощью прогнозатора (1) при заданных параметрах N,τ,μ.

2. Методы исследования

Нетрудно заметить, что $g_N(\mu,\tau,t)$ в силу формулы (4) и свойства умножения изображений [3] представляет собой свёртку импульсивной функции $\Psi_N(t)$ прогнозатора и входного сигнала $f(t)$, т.е.

$$g_N(\mu,\tau,t) = (\Psi_N * f)(t) = \int_0^t f(t-z)\Psi_N(z)\,dz, \tag{5}$$

$$f(t) \doteqdot F(p),\quad \Psi_N(t) \doteqdot \Psi_N^0(p)$$

Поэтому задачу вычисления оценки прогноза $g_N(\mu,\tau,t)$ можно свести к задаче определения импульсной функции $\Psi_N(t)$ и последующей задаче вычисления свёртки (5).

Итак, определим импульсную функцию $\Psi_N(t)$. С этой целью найдём расчётную формулу для коэффициентов $d_n\ (n \ge 1)$. Из формулы (3), учитывая формулу (2), после элементарных преобразований нетрудно получить

$$d_n = \frac{\tau}{n!}\lim_{p\to 0}\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left[e^{\tau p}(\mu p+1)^n\right], \quad n \ge 1.$$

Отсюда, применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, находим

$$d_n = \frac{\tau}{n!}\lim_{p\to 0}\sum_{K=0}^{n-1} C_{n-1}^{K}\left(e^{\tau p}\right)^{(n-1-K)}\left((\mu p+1)^n\right)^{(K)} =$$
$$= \frac{\tau}{n!}\lim_{p\to 0}\sum_{K=0}^{n-1} C_{n-1}^{K}\tau^{n-1-K}e^{\tau p}A_n^K\mu^K(\mu p+1)^{n-K}. \qquad (6)$$

Здесь C_{n-1}^{K} и A_n^K – число сочетаний и размещений соответственно,

$$C_{n-1}^{K} = \frac{(n-1)!}{K!(n-1-K)!}, \quad A_n^K = \frac{n!}{(n-K)!}.$$

Переходя в (6) к пределу при $p \to 0$ после очевидных преобразований окончательно получаем следующую формулу для коэффициентов d_n:

$$d_n = \frac{\tau^n}{n!}\sum_{K=0}^{n-1} C_{n-1}^{K}A_n^K\left(\frac{\mu}{\tau}\right)^K, \qquad (7)$$
$$n \ge 1; \ d_0 = 1$$

Далее, для определения импульсной функции $\Psi_N(t)$ найдём оригинал изображения $\omega^n(p)$, $n \ge 1$. В силу (2) имеем

$$\omega^n(p) = \frac{p^n}{(\mu p+1)^n} = \frac{p^n}{\mu^n\left(p+\frac{1}{\mu}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\mu^n}\frac{\left(p+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu}\right)^n}{\left(p+\frac{1}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\mu^n}\left(1-\frac{\frac{1}{\mu}}{p+\frac{1}{\mu}}\right)^n.$$

Пусть $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$. Тогда последняя формула может быть записана следующим образом:

$$\omega^{n}(p) = \lambda^{n}\left(1 - \frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{n} \tag{8}$$

Применяя формулу бинома Ньютона, получаем

$$\left(1 - \frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{n} = \sum_{K=0}^{n} C_{n}^{K} 1^{n-K}\left(-\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{K} =$$

$$= \sum_{K=0}^{n} C_{n}^{K}(-\lambda)^{K}\frac{1}{(p+\lambda)^{K}}.$$

Распишем последнюю сумму следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{K=0}^{n} C_{n}^{K}(-\lambda)^{K}\frac{1}{(p+\lambda)^{K}} = \\ &= C_{n}^{0}(-\lambda)^{0}\frac{1}{(p+\lambda)^{0}} + \\ &+ \sum_{K=1}^{n} C_{n}^{K}(-\lambda)^{K}\frac{1}{(p+\lambda)^{K}} = \\ &= 1 + \sum_{K=1}^{n} C_{n}^{K}(-\lambda)^{K}\frac{1}{(p+\lambda)^{K}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно известной формуле [4]

$$t^{K} \doteqdot \frac{K!}{p^{K+1}}, \quad K \in N,$$

и свойству смещения [4] имеем

$$e^{-\lambda t}t^{K} \doteqdot \frac{K!}{(p+\lambda)^{K+1}}, \quad K \in N.$$

Отсюда, учитывая формулу (9) и свойство линейности изображения по Лапласу, нетрудно получить следующее операторное равенство:

$$\left(1-\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{n} \doteqdot \delta(t)+\sum_{K=1}^{n} C_{n}^{K}(-\lambda)^{K} \frac{e^{-\lambda t} t^{K-1}}{(K-1)!}=$$
$$=\delta(t)-\lambda e^{-\lambda t} \sum_{K=1}^{n} C_{n}^{K} \frac{(-\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!} \qquad (10)$$

Здесь было использовано известное операторное равенство [4]

$$\delta(t) \doteqdot 1 .$$

Учитывая, что $\lambda=\frac{1}{\mu}$, из формул (8) и (10) получаем

$$\omega^{n}(p) \doteqdot \frac{1}{\mu^{n}}\left[\delta(t)-\frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{K=1}^{n} \frac{C_{n}^{K}}{(K-1)!}\left(-\frac{t}{\mu}\right)^{K-1}\right] \qquad (11)$$

Так как из (1) и (3) сразу следует

$$\Psi_{N}(p)=1+\sum_{n=1}^{N} d_{n} \omega^{n}(p),$$

то в силу (1) и (11) импульсная функция $\Psi_{N}(t)$ прогнозатора (1) определяется следующей формулой:

$$\Psi_{N}(t)=\delta(t)+\sum_{n=1}^{N} \frac{d_{n}}{\mu^{n}}\left[\delta(t)-\frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{K=1}^{n} \frac{C_{n}^{K}}{(K-1)!}\left(-\frac{t}{\mu}\right)^{K-1}\right]=$$
$$=\delta(t)\left[1+\sum_{n=1}^{N} \frac{d_{n}}{\mu^{n}}\right]-\frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{n=1}^{N} \frac{d_{n}}{\mu^{n}} \sum_{K=1}^{n} \frac{(-1)^{K-1} C_{n}^{K}}{(K-1)!}\left(\frac{t}{\mu}\right)^{K-1} . \qquad (12)$$

Положим

$$a_{n}=\frac{d_{n}}{\mu^{n}}, \quad n=\overline{1, N} \;;\; b_{K}=\frac{(-1)^{K-1} C_{n}^{K}}{(K-1)!}, \quad K=\overline{1, N} .$$

Тогда формула (12) принимает окончательный вид

$$\Psi_{N}(t)=\delta(t)\left[1+\sum_{n=1}^{N} a_{n}\right]-\frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{n=1}^{N} a_{n} \sum_{K=1}^{n} b_{K}\left(\frac{t}{\mu}\right)^{K-1} \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (5), получаем

$$g_N(\mu,\tau,t)=\left[1+\sum_{n=1}^{N}a_n\right]\int_0^t f(t-z)\delta(z)\,dz-$$
$$-\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{N}a_n\sum_{K=1}^{n}b_K\int_0^t\left(\frac{z}{\mu}\right)^{K-1}e^{-z/\mu}f(t-z)\,dz. \tag{14}$$

Принимая во внимание фильтрующее свойство δ -функции [5]

$$\int_0^t f(t-z)\delta(z)\,dz=f(t),$$

из (14) находим выражение для оценки прогноза

$$g_N(\mu,\tau,t)=\left[1+\sum_{n=1}^{N}a_n\right]f(t)-$$
$$-\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{N}a_n\sum_{K=1}^{n}b_K\int_0^t\left(\frac{z}{\mu}\right)^{K-1}e^{-z/\mu}f(t-z)\,dz.$$

Для вычисления интеграла в последней формуле введём новую переменную $S=\frac{z}{\mu}$. Тогда $z=\mu S$, $dz=\mu\,dS$ и интеграл принимает вид

$$\int_0^t\left(\frac{z}{\mu}\right)^{K-1}e^{-z/\mu}f(t-z)\,dz=$$
$$=\mu\int_0^{t/\mu}S^{K-1}e^{-S}f(t-\mu S)\,dS=\mu I_K(\mu,t). \tag{15}$$

Таким образом, оценка прогноза $g_N(\mu,\tau,t)$ имеет следующий вид:

$$g_N(\mu,\tau,t)=\left[1+\sum_{n=1}^{N}a_n\right]f(t)-$$
$$-\sum_{n=1}^{N}a_n\sum_{K=1}^{n}b_K I_K(\mu,t). \tag{16}$$

Так как при каждом n требуется вычислять интегралы $I_K(\mu,t)$, $K=\overline{1,n}$, то для уменьшения вычислительных операций следует предварительно вычислить интегралы $I_K(\mu,t)$, $K=\overline{1,N}$, а затем подставлять найденные значения в (16). Нетрудно проверить, что при таком подходе потребуется вычисление N интегралов вместо вычисления $\frac{N(N+1)}{2}$ интегралов при непосредственной реализацией формулы (16).

Следует особо отметить, что в случае дискретного входного сигнала $f(t)$ расчётная формула (16) сохраняет вид. Однако вместо интегралов (15) требуется рассматривать квадратурные формулы (суммы).

Заключение

В статье рассматривается метод вычисления оценки прогноза сигнала с помощью автоматического реализуемого прогнозатора. Получена явная расчётная формула для вычисления оценки прогноза заданного входного сигнала. Формула сводится к вычислению на каждом шаге взвешенных интегралов входного сигнала. В данной работе предложен способ уменьшения количества операций интегрирования на каждом шаге в $\frac{N+1}{2}$ раз, где N – порядок передаточной функции прогнозатора. Это позволяет уменьшить время вычисления прогноза при сохранении точности. Предложенный метод может быть применён как для непрерывных (аналоговых), так и для дискретных сигналов.

Список литературы

1. Марчук, Г.И. Численные методы в прогнозе погоды / Г. И. Марчук. – Л.: Гидрометеоиздат, 1967. – 355 с.
2. Дылевский, А. В. Автоматическое прогнозирование детерминированных сигналов / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Научный результат. Информационные технологии. – 2021. – Т. 6. – No 4. – С. 20–26. doi: 10.46916/22112021-2-978-5-00174-377-4
3. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

4. Эйдерман, В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления / В. Я. Эйдерман. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.
5. Гельфанд, И. М. Обобщённые функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 470 с.